# Sengils Regelecke:

## Krumme Sachen würfeln

In folgenden wollen wir uns daran machen zu erläutern, wie man noch so krumme Ergebnisse mit der Handvoll Würfel erreicht, die einem normalerweise zu Verfügung stehen. Im Extremfall wird sogar eine Münze genügen, um sämtliche Ergebnisse zu erzielen.

Angenommen, wir wollen eine Spannbreite von 1 bis $n$ erzielen, wobei $n$ eine positive, ganze Zahl ist. Zusätzlich gehen wir davon aus, daß jede Zahl zwischen 1 und $n$ gleichwahrscheinlich sein soll. Falls $n = 4, 6, 8, 10, 12$ oder 20, kann man die bekannten Würfel einsetzen. Bei $n = 2$ tut's auch eine Münze.

Bei $n = 2, 3$ oder 5 ergeben sich ebenfalls kaum Schwierigkeiten: bei 5 etwa wird ein 10-seitiger Würfel gewürfelt und die Ergebnisse wie folgt interpretiert: $1, 2 = 1; 3, 4 = 2; 5, 6 = 3; 7, 8 = 4; 9, 10 = 5$. Das Prinzip, was hier Pate gestanden hat, ist das der Teiler: wenn wir einen $wn$ würfeln können, können wir auch einen $wk$ würfeln, wenn $n$ durch $k$ ganzzahlig teilbar ist. Nach diesem Prinzip köennten wir etwa auf den $w4$ und den $w10$ verzichten, da 20 durch 10 und 4 teilbar ist.

Das nächste Prinzip ist das der Multiplikation. Wenn wir einen $wn$ und einen $wk$ würfeln können, so auch einen $w(n \times k)$, also etwa für $n = 3$ und $k = 5$ den (imaginären) Würfel $w15$. Dies geschieht, in dem wir vom ersten $wn$ die Zahl nehmen, wie sie fällt, das Ergebnis des zweiten multiplizieren wir - um 1 reduziert - mit $n$ und addieren es zum ersten. Bei $w15$ zum Beispiel, bekommt man als Ergebnis des Wurfes des $w3$ die Zahl 2 und als Ergebnis des Wurfes des $w5$ die Zahl 4 berechnen wir das Endergebnis als $2+3\times(4-1) = 2+9 = 11$. Wem dies zu kompliziert erscheint, der möge zwei Dinge bedenken. Erstens ist es genau dies Prinzip, mit dem der bekannte Würfel $w100$ gewürfelt wird, mit einer Ausnahme: die 10 erscheint auf der Würfelfläche als 0, insofern fällt die Subtraktion um 1 weg, dafür hat man aber $00 = 100$. Praktischer wären also Würfel, die auf den Flächen $0, 1, 2, \ldots$ statt $1, 2, 3, \ldots$ zu stehen haben. Zweitens ist dies auch nur ein Prinzip, was man mit leicht zu überblickenden Zahlen verwenden sollte.

Das dritte Prinzip ist meines Erachtens das mächtigste, wir nennen es das der Wiederholung ungültiger Würfe. Wir nehmen an, wir wollten ein $wn$ würfeln. Wir nehmen dazu einen Würfel $wk$, mit einem größeren $k$, also $k \geq n$, wobei wir $k$ so wählen, daß es uns genehm ist. Es sollt nicht viel größer als $n$ sein. Angenommen wir wollten einen $w89$ würfeln, dann wäre ein $w100$ keine schlechte Wahl. Nun würfeln wir den $wk$ so lange, bis das Ergebnis im erlaubten Bereich liegt, also zwischen 1 und $n$. Dieses

Verfahren führt garantiert zum Abschluß, selbst, wenn wir zum Werfen eines $w2$ einen $w1000$ auswählen würden. (Im letzteren Fall müßten wir allerdings m Durchschnitt 500 mal würfeln; deshalb sollte nach Möglichkeit $k$ nahe bei $n$ gewählt werden.)

Es gibt also verschiedene Möglichkeiten, krumme Zahlen zu erreichen. Bei einem $w36$ etwa könnten wir einen $w40$ solange würfeln, bis eine gültige Zahl erscheint (alles außer $37, 38, 39$ oder 40); den $w40$ würfeln wir als $w4 \times w10$. Alternativ können wir einen $w100/2$ solange würfeln, bis eine gültige Zahl erscheint. Oder wir würfeln $w6 \times w6$. Wir können jetzt auch die eingangs gemachte Aussage verstehen, daß man mit einer Münze alle $wn$ simulieren kann. Mit einer Münze kann man mit dem Multiplikatorprinzip alle $wn$ mit $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ erwürfeln. Mit dem Prinzip der Wiederholung ungültiger Würfe alle $n$ dazwischen.

Eine andere Art krumme Sachen zu würfeln ist die Summe von zwei oder mehr Würfelwürfen zu addieren. Das geschieht klassischerweise mit gleichartigen Würfeln und wird dann etwa als $2w6$ bezeichnet. Was aber geschicht mit den Wahrscheinlichkeiten, wenn $w8$ und $w4$ addiert werden? Die Spannbreite it diesselbe, nämlich $2-12$, aber die Verteilung ist im mittleren Bereich gleichmäßiger. In der Tabelle 1 kann man diesen Effekt gut beobachten. Wer

| Resultat | $w11 + 1$ | $w10 + w2$ | $w8 + w4$ | $w6 + w6$ |
|---|---|---|---|---|
| 2; 12 | $9,1\%$ | $5,0\%$ | $3,1\%$ | $2,8\%$ |
| 3; 11 | $9,1\%$ | $10,0\%$ | $6,2\%$ | $5,5\%$ |
| 4; 10 | $9,1\%$ | $10,0\%$ | $9,4\%$ | $8,3\%$ |
| 5; 9 | $9,1\%$ | $10,0\%$ | $12,5\%$ | $11,1\%$ |
| 6; 8 | $9,1\%$ | $10,0\%$ | $12,5\%$ | $13,8\%$ |
| 7 | $9,1\%$ | $10,0\%$ | $12,5\%$ | $16,7\%$ |

Tabelle 1: Verteilungsvergleich I

also eine Verteilung haben will, die bei den durchschnittlichen Werten etwa gleichverteilt ist, an den Rändern aber „dünner“ ist, der ist gut beraten, wenn er die Würfel nicht symmetrisch wählt. Wir wollen uns dies noch einmal veranschaulichen am (extremen) Beispiel in Tabelle 2 mit $5w2 + w20$ bzw. $6w5$, was beides Zahlen im Bereich $6 - 30$ liefert. Tendentiell läßt sich für das

| Resultat | 6; 30 | 7; 29 | 8; 28 | $\cdots$ | 16; 20 | 17; 19 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5w2 + w20$ | $0,1\%$ | $0,9\%$ | $2,5\%$ | $\cdots$ | $5,0\%$ | $5,0\%$ | $5,0\%$ |
| $6w5$ | $0,0\%$ | $0,0\%$ | $0,1\%$ | $\cdots$ | $9,6\%$ | $10,7\%$ | $11,2\%$ |

Tabelle 2: Verteilungsvergleich II

krumme Würfeln schließen: es ist günstiger so wenig wie möglich zu würfeln, denn dann hat man die Chancen besser unter Kontrolle als bei mehrfachem Werfen. Viele Würfel bedeuten zwar Häufungen beim Durchschnitt, aber die tatsächliche Häufung ist schwer abzuschätzen. Besser ist es, stattdessen eine spontane Tabelle zu entwerfen und dann eine Gleichverteilung zu benutzen. Etwa im folgenden Stil: $1\% - 20\%$ Erfolg, $21\% - 90\%$ Mißerfolg, $91\% - 100\%$ Patzer; nun würfel $w100$!

Abschließend noch als Amüsement die Verteilung der Summe der Würfel eines Standardpakets: $w4 + w6 + w8 + w10 + w12 + w20 (= 6 - 60)$ in Tabelle 3. Wie schon in den bisherigen Tabellen sind die Zahlen nur auf eine Nachommastelle genau.

| Resultat | Chance |
|---|---|
| 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12;<br>54; 55; 56; 57; 58; 59; 60 | $0,0\%$ |
| 13; 53 | $0,1\%$ |
| 14; 52 | $0,2\%$ |
| 15; 51 | $0,3\%$ |
| 16; 50 | $0,5\%$ |
| 17; 49 | $0,7\%$ |
| 18; 48 | $0,9\%$ |
| 19; 47 | $1,1\%$ |
| 20; 46 | $1,4\%$ |
| 21; 45 | $1,8\%$ |
| 22; 44 | $2,1\%$ |
| 23; 43 | $2,5\%$ |
| 24; 42 | $2,8\%$ |
| 25; 41 | $3,1\%$ |
| 26; 40 | $3,5\%$ |
| 27; 39 | $3,8\%$ |
| 28; 38 | $4,0\%$ |
| 29; 37 | $4,2\%$ |
| 30; 36 | $4,4\%$ |
| 31; 35 | $4,5\%$ |
| 32; 33; 34 | $4,6\%$ |

Tabelle 3: Verteilung für $w4 + w6 + w8 + w10 + w12 + w20$